Chapitre 20

Polynômes (partie A)

Plan du chapitre

Hypothèse

Dans tout ce chapitre, le corps $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On peut définir un polynôme en fonction d'un réel x, mais ce même polynôme peut aussi s'appliquer à une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, ou encore à un endomorphisme de groupes $f : G \to G$. Ainsi, c'est bien le même polynôme qu'on applique à ces trois objets :

$$P(x) = x^3 + 2x - 4$$

$$P(A) = A^3 + 2A - 4I_n$$

$$P(f) = f^3 + 2f - 4\mathrm{id}_E \qquad \text{avec } f^3 = f \circ f \circ f$$

On souhaite étudier le polynôme P indépendamment des objets en lequel on l'applique. Cela conduit à définir un polynôme selon une variable X qui sera appelée une indéterminée : on ne précisera pas l'ensemble auquel X appartient (en pratique X sera un élément d'une “algèbre”). Le polynôme ci-dessus s'écrira donc :

$$P(X) = X^3 + 2X - 4$$

1 Structure algébrique de $\mathbb{K}[X]$

1.1 Définition

Définition 20.1 (Définition intuitive, écriture développée)

Un polynôme (à une indéterminée) à coefficients dans $\mathbb{K}$ correspond à une famille $(a_0, \cdots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ avec $n \in \mathbb{N}$.
Si on note P un tel polynôme, on peut le représenter par son écriture développée :

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \quad = \quad a_N X^N + a_{N-1} X^{N-1} + \cdots + a_1 X + a_0$$

- $a_0, a_1, \cdots, a_n$ sont appelés les coefficients de P.
- Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, a_k est appelé coefficient de degré k de P.
- On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

On pourra noter indifféremment P ou $P(X)$ pour désigner le polynôme P.

Exemple 1. $-X^2 + 2, \quad 5X^{17}, \quad 4$ sont des polynômes.

$X^{1/2}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} X^k$ ne sont pas des polynômes.

$P = 0$ est appelé polynôme nul. Il correspond à une famille où tous les éléments sont nuls.

Cette définition pose toutefois un problème : la famille associée à un même polynôme n'est pas unique car on peut toujours rajouter des coefficients valant 0 :

- $-X^2 + 2$ correspond aussi bien à la famille $(2, 0, -1)$ que la famille $(2, 0, -1, 0)$, ou encore $(2, 0, -1, 0, 0)$, etc.

- Le polynôme nul correspond aux familles (0), $(0, 0)$, $(0, 0, 0)$, etc.

Bien qu'il n'y ait pas unicité de l'écriture, on a quand même la proposition suivante :

Définition 20.2 (Identification)

Soit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k X^k$. Les polynômes P et Q sont dits égaux et on écrit $P = Q$ si et seulement si $\quad \forall k \in [\![0, n]\!] \quad a_k = b_k$.

On notera qu'il faut que les sommes pour P et Q s'arrêtent au même entier n, ce qui est toujours possible quitte à rajouter des coefficients nuls à P et/ou Q, cf début de la section 1.4.

1.2 Degré d'un polynôme

Définition 20.3 (Degré)

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme de $\mathbb{K}[X]$. On définit son degré, noté $\deg P$ ou $\deg(P)$, comme étant la valeur suivante :

- Si $P \neq 0$, $\deg P$ est le plus grand entier $k \in [\![0,n]\!]$ tel que $a_k \neq 0$.
- Si $P = 0$, on pose par convention $\deg(0) = -\infty$.

Si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ est un polynôme écrit sous forme développée, on a donc :

$$\deg P := \begin{cases} -\infty & \text{si } P = 0 \\ \max\{k \in [\![0,n]\!] \mid a_k \neq 0\} & \text{si } P \neq 0 \end{cases}$$

En particulier $\deg P \in \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$.

Exemple 2. Le degré de $P = a_0 + a_1 X$ est ......

Exemple 3. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Alors $P \neq 0$ si et seulement si $\deg P$.............

Exemple 4. $P \in \mathbb{K}[X]$ est dit constant si $P = a_0$ avec $a_0 \in \mathbb{K}$, càd si $\deg P$.......... . Plus précisément :

- $a_0 \neq 0$ ssi P est constant non nul ssi $\deg P$............
- $a_0 = 0$ ssi P est nul ssi $\deg P$............

Notation. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré $\boxed{\text{au plus}}$ n :

$$\mathbb{K}_n[X] = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid \deg P \leq n\}$$

En particulier $\mathbb{K}_0[X]$ est l'ensemble des polynômes constants. On peut l'identifier à $\mathbb{K}$ et écrire par exemple $P = a_0 \in \mathbb{K}$.

1.3 Écriture normalisée et vocabulaire

La dénomination d'écriture normalisée n'est pas officielle. Mais c'est bien pratique pour fixer les idées.

Propriété 20.4 (Non officiel : écriture "normalisée")

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul et $n \in \mathbb{N}$. Alors $\deg P = n$ si et seulement s'il existe $(a_0, \cdots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tels que

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \qquad \boxed{\text{avec } a_n \neq 0}$$

Il s'agit de l'écriture normalisée de P. Cette écriture est unique pour tout polynôme non nul.

Le principal intérêt de l'écriture normalisée est de donner directement le degré. Le polynôme nul n'admet pas d'écriture normalisée.

Exemple 5. Soit $P = a_2X^2 + a_1X + a_0$ avec $a_2 \neq 0$. Alors $\deg P = 2$. En revanche si $a_2 = 0$, on aurait $\deg P$...........

On a vu deux écritures différentes d'un polynôme : développée et normalisée. Selon l'écriture retenue, on n'a pas la même information sur le degré :

Propriété 20.5 (Lien entre écriture et degré)

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $n \in \mathbb{N}$.

- Avec l'écriture développée :

$$P \in \mathbb{K}_n[X] \iff \deg P \leq n \iff P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \qquad \text{avec } a_0, \cdots, a_n \in \mathbb{K}$$

- Avec l'écriture normalisée :

$$\deg P = n \iff P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \qquad \text{avec } a_0, \cdots, a_n \in \mathbb{K} \quad \text{et} \quad \boxed{a_n \neq 0}$$

L'écriture développée de P donne une information sur le degré *maximal* de P, donc sur un ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ auquel il appartient. L'écriture normalisée de P donne la valeur précise du degré de P.

Vocabulaire lié au degré. Soit P un polynôme non nul qui a une écriture normalisée $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $a_n \neq 0$.

1. a_n est appelé le coefficient dominant (ou de plus haut degré) de P.
2. a_nX^n est appelé terme dominant (ou de plus haut degré) de P.
3. P est dit unitaire si $a_n = 1$, i.e. si P est de la forme $\quad X^n + a_{n-1}X^n + \ldots a_1X + a_0$
4. P est dit un monôme si $a_{n-1} = \cdots = a_0 = 0$, i.e. si P est de la forme $\quad a_nX^n$

Propriété 20.6 (Identification)

Soit $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. $P = Q$ si et seulement si $\deg P = \deg Q$ et leurs coefficients de même degré sont égaux deux à deux.

Si P et Q sont non nuls, on peut les mettre sous forme normalisées

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \qquad \text{et} \qquad Q = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k \qquad \text{avec} \quad a_n \neq 0 \quad \text{et} \quad b_m \neq 0$$

On a alors $P = Q$ si et seulement si $n = m$ et $\quad \forall k \in [\![0, n]\!] \quad a_k = b_k$.

1.4 Somme de polynômes et multiplication par une constante

Quand on écrit un polynôme avec l'écriture *développée* $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, on peut librement compléter la famille $(a_0, \cdots, a_n)$ en ajoutant des coefficients $a_{n+1}, a_{n+2}, \cdots$ tous égaux à 0. Ainsi, si $N > n$, on peut écrire $P = \sum_{k=0}^{N} a_k X^k$ en posant $a_k = 0$ pour $n < k \leq N$.

C'est pourquoi dans la propriété qui suit on prend des écritures développées pour P et Q qui vont jusqu'au même entier N : on peut toujours s'y ramener quitte à ajouter des zéros [1].

Définition 20.7 (Opérations $+$ et $\lambda\cdot$)

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$:

$$P = \sum_{k=0}^{N} a_k X^k \qquad Q = \sum_{k=0}^{N} b_k X^k$$

On pose alors

$$P+Q := \sum_{k=0}^{N} (a_k+b_k)X^k \qquad \lambda P := \sum_{k=0}^{N} (\lambda a_k)X^k$$

$P+Q$ et λP sont bien des polynômes : en effet pour tout k, a_k+b_k et λa_k sont bien des éléments du corps $\mathbb{K}$.

Les notations sont cohérentes avec la linéarité de la somme :

$$\lambda P+\mu Q = \lambda \sum_{k=0}^{N} a_k X^k + \mu \sum_{k=0}^{N} b_k X^k = \sum_{k=0}^{N} (\lambda a_k + \mu b_k)X^k$$

Propriété 20.8

L'ensemble $(\mathbb{K}[X],+)$ est un groupe abélien. Son élément neutre est le polynôme nul. Le symétrique de P pour $+$ est le polynôme $-P$.

Propriété 20.9 (Degré de λP)

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

$$\deg(\lambda P) = \begin{cases} \deg P & \text{si } \lambda \in \mathbb{K}^* \\ -\infty & \text{si } \lambda = 0 \end{cases}$$

Démonstration. Si $\lambda = 0$ ou $P = 0$, le polynôme λP n'a que des coefficients nuls : c'est le polynôme nul et donc son degré est $-\infty$.

Si $\lambda \neq 0$ et $P \neq 0$, on peut écrire (forme normalisée) $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $a_n \neq 0$. Alors $\lambda P = \sum_{k=0}^{n} (\lambda a_k) X^k$. Comme $\lambda a_n \neq 0$, il s'agit de la forme normalisée de λP, donc $\deg(\lambda P) = n = \deg P$. □

1. Certains auteurs vont même jusqu'à rajouter des termes nuls jusqu'à l'infini et écrire que l'écriture développée d'un polynôme est $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ où (a_k) est une suite nulle à partir d'un certain rang. C'est en fait la définition la plus "correcte" d'un polynôme.

Propriété 20.10 (Degré de $P+Q$)

Soit $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. On a :
$$\deg(P+Q) \leq \max(\deg P, \deg Q)$$
De plus, si $\deg P \boxed{\neq} \deg Q$, alors
$$\deg(P+Q) = \max(\deg P, \deg Q)$$
avec la convention $\max(n, -\infty) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$.

Attention, si $\deg P = \deg Q$, il peut arriver que $\deg(P+Q) < \max(\deg P, \deg Q)$. Par exemple, si $P \neq 0$ et $Q = -P$, alors $\deg(P+Q) =$ .... tandis que $\max(\deg P, \deg(-P)) = \deg P \geq 0$ car P et $-P$ ont même degré.

Démonstration.

□

Corollaire 20.11

Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $P, Q \in \mathbb{K}_n[X]$, alors $\quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} \qquad \lambda P + \mu Q \in \mathbb{K}_n[X]$.
En particulier, $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-groupe de $(\mathbb{K}[X], +)$.

1.5 Produit de polynômes

Le produit de deux polynômes est calqué sur le produit tel qu'on le calcule dans les réels. En introduction, on considère donc deux fonctions polynômiales $f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ définies pour tout réel x par :
$$f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i \qquad g(x) = \sum_{j=0}^{n} b_i x^i$$
avec $m, n \in \mathbb{N}$. Le produit fg est aussi une fonction polynômiale :
$$\begin{aligned}(fg)(x) &= \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m\right)\left(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n\right) \\ &= a_0 b_0 \quad + (\qquad\qquad\qquad\qquad) x \quad + \quad (\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad) x^2 \quad + \quad \ldots \quad + \quad a_m b_n x^{m+n}\end{aligned}$$

Plus généralement, le coefficient de degré k de fg est

$$\sum_{i+j=k} a_i b_j \quad = \quad a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \cdots + a_{k-1} b_1 + a_k b_0$$

(on sous-entend que i et j sont les indices de sommation et que $i \in [\![0,m]\!]$ et $j \in [\![0,n]\!]$ car a_i et b_j ne sont définis que pour ces valeurs de i et j). Sur le même principe, on peut montrer que

$$\left(\sum_{i=0}^{m} u_i\right)\left(\sum_{j=0}^{n} v_j\right) = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} u_i v_j = \sum_{k=0}^{m+n}\left(\sum_{i+j=k} u_i v_j\right)$$

Définition 20.12 (Opération $\times$)

Soit $P = \sum_{i=0}^{m} a_i X^i$ et $Q = \sum_{j=0}^{n} b_j X^j$ deux polynômes avec $m, n \in \mathbb{N}$. On définit le polynôme produit :

$$PQ := \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} a_i b_j X^{i+j} \quad = \quad \sum_{k=0}^{m+n} c_k X^k \qquad \text{avec} \quad c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$$

Propriété 20.13 (Degré de PQ)

Soit $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. On a $\quad \deg(PQ) = \deg P + \deg Q$.

Cette formule sous-entend la convention $n + (-\infty) = -\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$.

Démonstration.

$\square$

La preuve ci-dessus montre en particulier $P \neq 0$ et $Q \neq 0$, le coefficient dominant de PQ est le produit des coefficients dominants de P et Q. En particulier le produit de polynômes unitaires est un polynôme unitaire.

Propriété 20.14

$(\mathbb{K}[X], +, \times)$ est un anneau intègre. Son élément unité est le polynôme constant $1 \in \mathbb{K}_0[X]$.

Démonstration. La seule propriété non évidente est qu'il n'y a pas de diviseur de zéro dans $\mathbb{K}[X]$. Cela découle de la propriété précédente : le produit de deux polynômes non nuls (donc de degrés positifs) a un degré positif, et donc ce produit est non nul. Cela prouve la propriété qu'il n'y a pas de diviseur de zéro dans $\mathbb{K}[X]$, et donc que c'est un anneau intègre. $\square$

Corollaire 20.15

Soit $P, Q, R \in \mathbb{K}[X]$. Si $PQ = 0$, alors $P = 0$ ou $Q = 0$.
Tout polynôme non nul est régulier :

$$(R \neq 0 \quad \text{et} \quad PR = QR) \quad \Longrightarrow \quad P = Q$$

Propriété 20.16 (Éléments inversibles de $\mathbb{K}[X]$)

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. P est inversible si et seulement si P est constant non nul.
(donc si et seulement si $\deg P = 0$)

Démonstration. Sens indirect : si $P = a_0 \in \mathbb{K}^*$, alors en posant le polynôme constant $Q = \dfrac{1}{a_0}$, on a bien $PQ = 1$, donc P est inversible.
Sens direct : si P est inversible alors il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $PQ = 1$.

- D'une part, comme $PQ = 1$, on a nécessairement $P \neq 0$ et $Q \neq 0$ donc $\deg P \geq 0$ et $\deg Q \geq 0$.
- D'autre part, en passant au degré dans $PQ = 1$, on a

$$\deg(PQ) = \deg 1 \qquad \text{donc} \qquad \deg P + \deg Q = 0$$

Ainsi, on a nécessairement $\deg P = \deg Q = 0$. Par conséquent, P est constant non nul. $\square$

Attention, on ne peut donc écrire P^{-1} que si P est constant non nul. Et en pratique, il n'y a pas de raison de l'écrire...

Propriété 20.17 (Bilinéarité du produit)

Soit $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors
$$\lambda(PQ) = P(\lambda Q) = (\lambda P)Q$$

On pourra donc écrire λPQ sans ambiguité

1.6 Puissances d'un polynôme

Définition 20.18

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $n \in \mathbb{N}$. On définit le polynôme

$$P^n = \underbrace{P \times \cdots \times P}_{n \text{ fois}}$$

avec la convention $P^0 = 1$.

Remarque. La notation $P = P(X)$ est cohérente avec cette notion : par exemple si $P = X$, alors P^n et le monôme X^n sont effectivement égaux.

Propriété 20.19 (Degré de P^n)

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\deg(P^n) = n \deg P$$

La formule reste vraie si $n = 0$ avec la convention $0 \times (-\infty) = 0$, mais cela a peu d'intérêt à retenir en pratique.

Propriété 20.20 (Calcul dans un anneau)

Pour tous $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(P+Q)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^k Q^{n-k}$$

$$P^n - Q^n = (P-Q) \sum_{k=0}^{n-1} P^k Q^{n-1-k}$$

Exemple 6. Soit un entier $n \geq 1$. Déterminer le degré et (s'il existe) le coefficient dominant de $P = (X+1)^n - X^n - nX^{n-1}$.

1.7 Évaluation en un point

Définition 20.21

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. On appelle <u>évaluation de P en α</u> la valeur

$$P(\alpha) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, \alpha^k \quad = a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \cdots + a_n\alpha^n \in \mathbb{K}$$

On prendra garde au fait que si $P = a_0$, i.e. P est constant, alors $P(\alpha)$ ne dépend pas de α. En particulier avec $P = 1$, on a $P(\alpha) = 1$. On évitera cependant d'écrire “$1(\alpha)$” à cause d'une confusion évidente et dangereuse avec le produit de $1 \in \mathbb{K}$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.

Avec des notations évidentes, on a de plus

$$(P+Q)(\alpha) = P(\alpha) + Q(\alpha)$$
$$(\lambda P)(\alpha) = \lambda P(\alpha)$$
$$(PQ)(\alpha) = P(\alpha)Q(\alpha)$$

Propriété 20.22

Soit $\alpha \in \mathbb{K}$. L'application

$$\begin{aligned} \mathrm{ev}_\alpha : \mathbb{K}[X] &\to \mathbb{K} \\ P &\mapsto P(\alpha) \end{aligned}$$

est un morphisme d'anneaux.

Exemple 7. Si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ alors $\quad P(0) =$.............. $\quad$ et $\quad P(1) =$..............

1.8 Composition de polynômes

Définition 20.23

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ et $Q = \sum_{j=0}^{m} b_j X^j \in \mathbb{K}[X]$. On définit le <u>polynôme composée</u> $P \circ Q$ par

$$P \circ Q = \sum_{k=0}^{n} a_k Q^k = \sum_{k=0}^{n} a_k \left(\sum_{j=0}^{m} b_j X^j \right)^k$$

Exemple 8. Soit $P = X^2 - X$, $\quad Q = 2X + 1 \quad$ et $\quad R = 3$. Calculer :

$P \circ Q =$.. $\qquad$ $P \circ R =$..

$Q \circ P =$.. $\qquad$ $R \circ P =$..

On note parfois $P(Q)$ pour la composée $P \circ Q$... Mais il faut la manier avec précaution, car on peut confondre avec le produit $P \times Q$. Dans la pratique on l'utilisera principalement lorsque Q est de la forme $X \pm \alpha$ dans la formule de Taylor (voir plus loin). On notera cependant que :

- Si $Q = \lambda \in \mathbb{K}$, alors $P \circ Q$ est constant et égal à $P(\lambda)$: la notation $P(Q)$ est cohérente avec l'évaluation en λ.
- Si $Q = X$, alors $P \circ Q$ est égal au polynôme P : la notation $P(Q)$ est cohérente avec le fait qu'on peut noter $P(X)$ le polynôme P.

Propriété 20.24 (Degré de $P \circ Q$)

Soit $P, Q \in \mathbb{K}[X]$.

1. Si Q est non constant, alors $\deg(P \circ Q) = \deg P \times \deg Q$.
2. Si Q est constant, alors $P \circ Q$ est constant et donc $\deg(P \circ Q) \leq 0$.

2 Fonction polynômiale

Définition 20.25 (Fonction polynômiale)

Soit $X \subset \mathbb{K}$ et $f : X \to \mathbb{K}$. On dit que f est une fonction polynômiale s'il existe un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$\forall x \in X \qquad f(x) = P(x)$$

Définition 20.26

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On définit la fonction polynômiale associée à P comme étant la fonction $f_P : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ définie par

$$f_P : x \mapsto P(x)$$

Cette notation n'est pas officielle. En général, on note plutôt $\widetilde{P}$ la fonction f_P.

Au lycée, on dit par exemple que la fonction $x \mapsto x^2 + 2x$ est un polynôme, mais le terme correct est en fait fonction polynômiale.

La notation $P(x)$ laisse parfois penser (à tort) que P est une fonction, mais c'est bien un polynôme. Et sur le principe ce n'est pas le même objet qu'une fonction : P appartient à $\mathbb{K}[X]$ et non $\mathbb{K}^{\mathbb{K}}$. On verra cependant que l'application $P \mapsto f_P$ est bijective de $\mathbb{K}[X]$ sur l'ensemble des fonctions polynomiales (la surjectivité découle de la définition).

Les opérations $+$, $\lambda\cdot$, $\times$ et $\circ$ vues précédemment sont "compatibles" avec les opérations $+$, $\lambda\cdot$, $\times$ et $\circ$ entre fonctions qu'on a vu au chapitre de fonctions usuelles. Cela signifie que pour tous polynômes P, Q et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :

- $f_{P+Q} = f_P + f_Q$
- $f_{\lambda P} = \lambda f_P$
- $f_{PQ} = f_P f_Q$
- $f_{P \circ Q} = f_P \circ f_Q$

3 Dérivation formelle dans $\mathbb{K}[X]$

3.1 Définitions et premières propriétés

Soit $k \in \mathbb{N}$. Si f est la fonction définie par $f(x) = x^k$, alors

$$f'(x) = \begin{cases} kx^{k-1} & \text{si } k \geq 1 \\ 0 & \text{si } k = 0 \end{cases}$$

Sur le même principe, on va définir $(X^k)' = kX^{k-1}$ si $k \geq 1$, tandis que $(X^0)' = 1' = 0$. On évitera à tout prix d'écrire X^{-1}.

Définition 20.27

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$. Le polynôme dérivé (ou dérivée formelle) de P est le polynôme

$$P' = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} X^k$$

Sur le principe, la dérivation est en tout point similaire à celle que l'on fait dans les réels :

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\right)' = \sum_{k=0}^{n} a_k \left(X^k\right)' = \sum_{k=1}^{n} a_k \left(X^k\right)' = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}$$

Attention, on ne peut pas écrire “X^{-1}”, donc en particulier on ne peut écrire $(X^k)' = kX^{k-1}$ que lorsque $k \geq 1$. C'est pourquoi la première somme de la définition commence à l'indice 1.

Exemple 9. On a $(-5X^3 + 4X^2 - 7)' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Attention, on a certes le droit d'écrire X', mais on ne peut toujours pas écrire x' si x est un réel !

Remarque. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la fonction polyomiale f_P est dérivable, et il y a “compatibilité” entre ces notions : $(f_P)' = f_{P'}$. Mais la dérivée formelle reste définie si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors qu'on ne sait pas dériver une fonction définie sur $\mathbb{C}$. Plus exactement, c'est une dérivation qui est purement algébrique (on n'utilise pas la notion de limite). C'est pour cela que l'on parle de dérivée *formelle*.

3.2 Dérivation et opérations de $\mathbb{K}[X]$

Propriété 20.28 (Dérivation et $+, \lambda\cdot, \times, \circ$)

Soit $P, Q \in \mathbb{K}[X]$.

- Linéarité : pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, on a $(\lambda P + \mu Q)' = \lambda P' + \mu Q'$.
- Produit : $(P \times Q)' = P' \times Q + P \times Q'$.
- Composition : $(P \circ Q)' = Q' \times (P' \circ Q)$.

Démonstration. On montre que ces égalités entre polynômes sont valides en vérifiant que les polynômes mis en jeu ont même degré et des coefficients égaux deux à deux. On met ici la démonstration pour le produit, qui peut être lue rapidement en première lecture :

- On commence par montrer la formule lorsque P et Q sont deux monômes : on suppose que $P = X^p$ et $Q = X^q$ avec $p, q \in \mathbb{N}$. Si $p = 0$, alors $P = 1$ et donc $P' = 0$. On a alors
$$(PQ)' = Q' = PQ' + P'Q$$
Idem si $q = 0$. On suppose donc que $p \geq 1$ et $q \geq 1$. Alors $PQ = X^{p+q}$, si bien que
$$(PQ)' = (p+q)X^{p+q-1}$$
et
$$P'Q + PQ' = (pX^{p-1})X^q + X^p(qX^{q-1}) = (p+q)X^{p+q-1}$$
La formule est donc démontrée pour des monômes.
- On suppose à présent P et Q quelconques : on pose $P = \sum_{i=0}^{m} a_i X^i$ et $Q = \sum_{j=0}^{n} b_j X^j$. Alors

$$\begin{aligned}
(PQ)' &= \left(\left(\sum_{i=0}^{m} a_i X^i \right) \left(\sum_{j=0}^{n} b_j X^j \right) \right)' \\
&= \left(\sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} a_i b_j X^i X^j \right)' \\
&= \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} a_i b_j \left(X^i X^j \right)' && \text{par linéarité (assertion 1)} \\
&= \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} a_i b_j \left[\left(X^i \right)' X^j + X^i \left(X^j \right)' \right] \\
&= \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} a_i b_j \left(X^i \right)' X^j + \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} a_i b_j X^i \left(X^j \right)' \\
&= \sum_{i=0}^{m} a_i \left(X^i \right)' \sum_{j=0}^{n} b_j X^j + \sum_{i=0}^{m} a_i X^i \sum_{j=0}^{n} b_j \left(X^j \right)' \\
&= \left(\sum_{i=0}^{m} a_i X^i \right)' \sum_{j=0}^{n} b_j X^j + \sum_{i=0}^{m} a_i X^i \left(\sum_{j=0}^{n} b_j X^j \right)' && \text{par linéarité} \\
&= P'Q + PQ'
\end{aligned}$$

□

Exemple 10. Déterminer la dérivée formelle du polynôme $P = (2X - 1)^4$.

Propriété 20.29 (Degré de P')

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

- Si $\deg P \geqslant 1$, alors $\deg P' = \deg P - 1$.
- $P' = 0$ si et seulement si P est constant (i.e. $\deg P \leq 0$).

Démonstration.

Pour la seconde assertion, le sens réciproque est évident. Pour le sens direct, on raisonne par contraposée : il suffit de montrer que si P est non constant, alors $P' \neq 0$. Or, si P est non constant, on a $\deg P \geq 1$, et donc par la première assertion on a $\deg P' \geq 1 - 1 = 0 \neq +\infty$. Ainsi, $P' \neq 0$. □

3.3 Dérivée k-ième

Définition 20.30

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On définit récursivement le polynôme dérivé d'ordre k de P, noté $P^{(k)}$ en posant :

- $P^{(0)} = P$
- Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P^{(k+1)} = (P^{(k)})'$

Exemple 11 (Important !)**.** Soit $k, n \in \mathbb{N}$.

$$(X^n)^{(k)} =$$

En particulier $(X^n)^{(n)} =$ ....

On peut généraliser les propriétés de la dérivée formelle aux dérivées successives :

Propriété 20.31

Soit $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, et $n \in \mathbb{N}$.

- Linéarité : pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, on a $(\lambda P + \mu Q)^{(n)} = \lambda P^{(n)} + \mu Q^{(n)}$
- Formule de Leibniz : $(P \times Q)^{(n)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)}$

Propriété 20.32 (Degré de $P^{(n)}$)

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $n \in \mathbb{N}$.

- Si $\deg P \geqslant n$, alors $\deg(P^{(n)}) = \deg P - n$.
- $P^{(n)} = 0$ si et seulement si $\deg P \leq n - 1$.

Exemple 12. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. Déterminer la dérivée k-ième de $Q(X) = P(X+\alpha) = P \circ (X+\alpha)$ en fonction de celle de P.

3.4 Formule de Taylor

Théorème 20.33 (Formule de Taylor)

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{K}_n[X]$ (donc un polynôme de degré n ou moins). Enfin, soit $\alpha \in \mathbb{K}$. On a :

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k.$$

Si $\deg P < n$, alors $P^{(k)}(\alpha) = 0$ pour tout $k \in [\![\deg P + 1, n]\!]$: les termes correspondants de la somme sont alors nuls.

Démonstration. On fait la preuve pour $\alpha = 0$ d'abord, puis pour $\alpha \neq 0$.

- On suppose $\alpha = 0$.

- Soit $\alpha \in \mathbb{K}$ quelconque. On pose $Q(X) = P(X+\alpha)$. D'après le point précédent, $Q(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{Q^{(k)}(0)}{k!} X^k$. Ainsi, on a d'une part
$$P(X) = Q(X-\alpha) = \sum_{k=0}^{n} \frac{Q^{(k)}(0)}{k!}(X-\alpha)^k$$
et d'autre part, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $Q^{(k)}(X) = P^{(k)}(X+\alpha)$ par l'exemple 12, donc $Q^{(k)}(0) = P^{(k)}(\alpha)$. Finalement,
$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k$$

□

Remarque. En particulier, si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, alors $a_k = \frac{P^{(k)}(0)}{k!}$.

Corollaire 20.34

Si deux polynômes P et Q ont la même fonction polynômiale ($f_P = f_Q$), alors $P = Q$. En particulier, l'application $P \mapsto f_P$ est bijective de $\mathbb{K}[X]$ sur l'ensemble des fonctions polynomiales.

Démonstration. On admettra cette propriété pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Supposons $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Soit $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ tels que $f_P = f_Q$. Or, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a
$$P^{(k)}(0) = (f_P)^{(k)}(0) = (f_Q)^{(k)}(0) = Q^{(k)}(0)$$
Ainsi, étant donné $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq \deg P$ et $n \geq \deg Q$, on a
$$P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{Q^{(k)}(0)}{k!} X^k = Q$$
Ceci prouve que l'application de $\mathbb{R}[X]$ dans l'ensemble des fonctions polynômiales définie par $P \mapsto f_P$ est injective. Elle est par ailleurs surjective par définition des fonctions polynômiales. Elle est donc bijective. □